"Devoir maison" bilan des acquis de première attendus en terminale

Consigne : Pour que ce devoir ait un intérêt, ne pas regarder la correction avant de l'avoir traité entièrement.

Exercice 1 : Bases de calcul littéral et tableau de signe produit/quotient

1. (a) Expliquer avec vos propres mots dans quelles situations on peut "simplifier" dans un quotient.
   (b) Peut-on simplifier dans les situations suivantes ?
   - $\dfrac{x+3}{3x}$
   - $\dfrac{x(x+3)}{3x}$
2. (a) En identifiant un facteur commun, factoriser $A(x) = x^3 - 2x^2 + x$.
   (b) En dressant un tableau de signes produit, étudier le signe de $A(x)$ en fonction de x.
3. (a) Mettre l'expression $B(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x+1}$ au même dénominateur.
   (b) En dressant un tableau de signes quotient, étudier le signe de $B(x)$ en fonction de x.

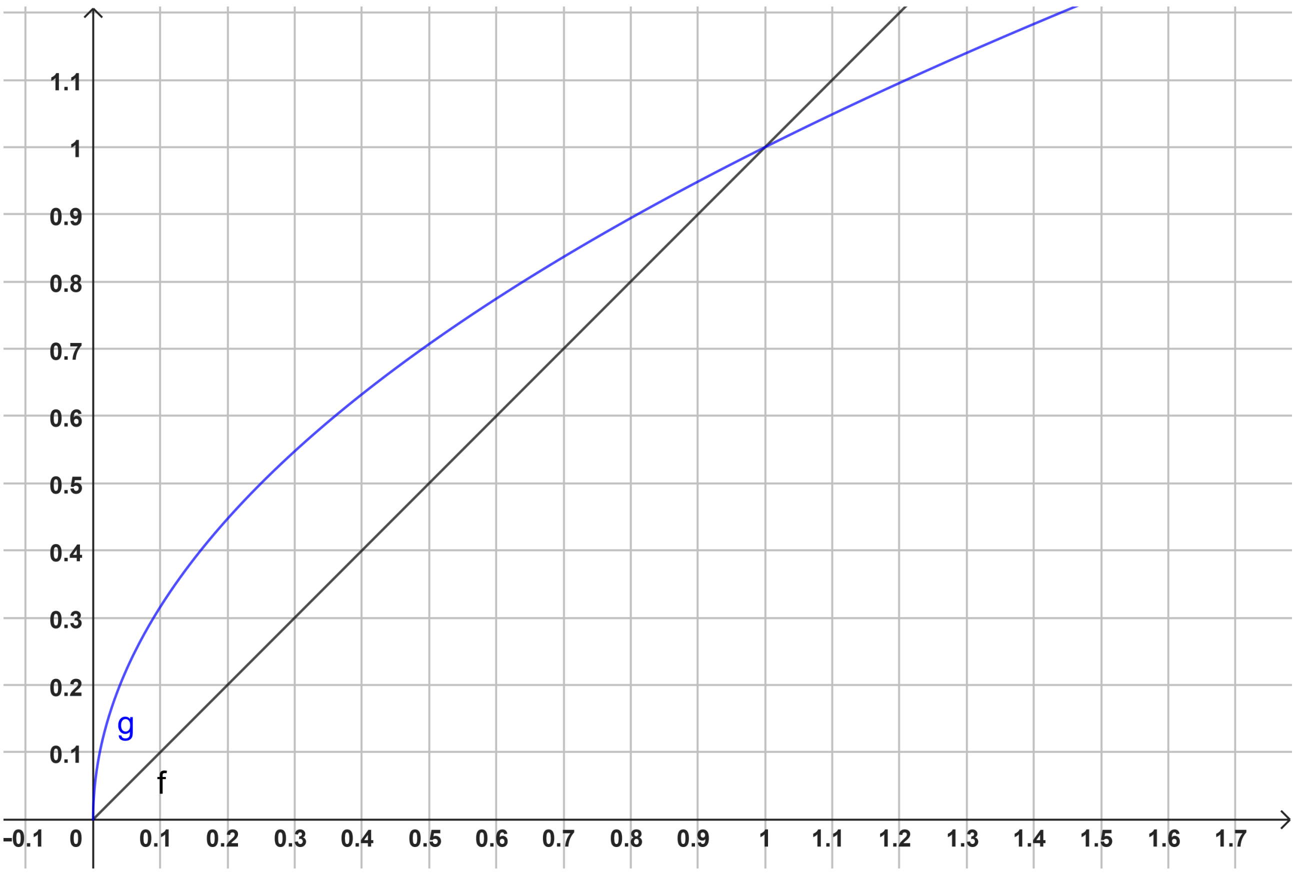
Exercice 2 : Étude de fonctions

1. On considère la fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $g(x) = \dfrac{2x+7}{4-2x}$.
   (a) Conjecturer à l'aide de la calculatrice ou de géogébra les variations de la fonction g
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, on a $g'(x) = \dfrac{22}{(4-2x)^2}$
   (c) Étudier le signe de g' puis en déduire le tableau de variations de g.
   (d) (Bonus) Déterminer le signe de g
2. On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
   $f(x) = (-2x^2 + 1)e^{-4x+7}$
   (a) Conjecturer à l'aide de la calculatrice ou de géogébra les variations de la fonction f
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = (8x^2 - 4x - 4)e^{-4x+7}$
   (c) Étudier le signe de f' puis en déduire le tableau de variations de f. *On prendra soin de faire apparaître la valeur exacte des extrema éventuels.*
3. (Bonus) On considère la fonction h définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $h(x) = e^x - x$.
   (a) Dériver h
   (b) En utilisant le fait que $1 = e^0$ et la croissance de l'exponentielle, étudier le signe de h'.
   (c) En déduire le tableau de variations de h.

Exercice 3 : Étude de suites

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n$. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2. On considère la suite définie par $v_0 = 0,2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{v_n}$. On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction $\sqrt{\ }$ (en bleu, notée g sur le graphique), ainsi que la droite d'équation $y = x$ (en noir).



   (a) Placer v_0 sur l'axe des abscisses, puis son image $v_1 = \sqrt{v_0} = g(v_0)$ sur l'axe des ordonnées.
   (b) Grâce à la droite d'équation $y = x$, ramener v_1 sur l'axe des abscisses.
   (c) Placer de même sur l'axe des abscisses v_2, v_3 et v_4.
   (d) Conjecturer le sens de variations et la limite de (v_n).