

Correction "Devoir maison" bilan des acquis de première attendus en terminale

Exercice 1 : Bases de calcul littéral et tableau de signe produit/quotient

1. (a) On peut simplifier par un nombre (ou une variable, puisqu'une variable EST un nombre) dans un quotient lorsque ce même nombre est un FACTEUR du numérateur ET du dénominateur, c'est à dire lorsque ce nombre est MULTIPLIÉ par le reste du numérateur et du dénominateur.
- (b) On ne peut pas simplifier dans le premier cas car au numérateur, on a affaire à une somme et non pas à un produit.

On peut simplifier par x dans le deuxième cas car le numérateur est bien un produit dont x est un facteur (le deuxième facteur étant $(x + 3)$), et le dénominateur est également bien un produit dont x est un facteur (le deuxième facteur étant 3). On a donc $\frac{x(x + 3)}{3x} = \frac{x + 3}{3}$.

Pour compléter, un troisième exemple : dans $\frac{3x}{3x + 2}$, on ne peut PAS simplifier par x ou par 3, malgré la présence du produit $3x$, car le dénominateur n'est pas un produit (c'est la somme de $3x$ et de 2).

2. (a) On remarque le facteur commun x dans les trois termes de la somme, donc on factorise par x : $A(x) = x(x^2 - 2x + 1)$.
- (b) On cherche le signe du polynôme $x^2 - 2x + 1$. Un calcul de discriminant ou reconnaître l'identité remarquable $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ permet de conclure que ce polynôme est toujours positif. D'où le tableau de signe :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de x	-	0	+
signe de $x^2 - 2x + 1$	+	0	+
signe du produit $A(x)$	-	0	+

$$3. B(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{x+1} = \frac{1 \times (x+1)}{2 \times (x+1)} + \frac{1 \times 2}{(x+1) \times 2} = \frac{x+1+2}{2(x+1)} = \frac{x+3}{2(x+1)}$$

4. Étude du signe de $x + 3$: $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$
 Étude du signe de $x + 1$: $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

D'où le tableau de signe :

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
signe de $x + 3$	-	0	+	+
signe de 2	+	+	+	+
signe de $x + 1$	-	-	0	+
signe de $B(x)$	+	0	-	+

Exercice 2 : Étude de fonctions

RAPPELS :

- Pour étudier les variations d'une fonction f , on étudie le signe de sa dérivée f' :
 - Si f' est positive sur un intervalle, alors f y est croissante
 - Si f' est négative sur un intervalle, alors f y est décroissante
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- Pour un polynôme de degré 2 de la forme $ax^2 + bx + c$, le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$, et les racines sont $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
Le polynôme est du signe de a à l'extérieur des racines, et du signe de $-a$ à l'intérieur des racines.

1. (a) On conjecture à l'aide de l'un des outils que g est croissante sur $] -\infty ; 2 [$ et sur $] 2 ; +\infty [$, avec une valeur interdite en 2.

ATTENTION rappel : il est faux de dire que g est croissante sur tout son ensemble de définition, car par exemple $0 < 6$ mais $g(0) < g(6)$, ce qui ne correspond pas à une fonction décroissante...

- (b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ comme quotient de fonctions dérivables. Il s'agit d'un quotient $g = \frac{u}{v}$, avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) = 2x + 7 \\ v(x) = 4 - 2x \end{cases}$ et donc : $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v'(x) = -2 \end{cases}$ Donc

en appliquant la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ (*ATTENTION : ne pas oublier les parenthèses en remplaçant u, v, u' et v'*), on obtient pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2(4 - 2x) - (2x + 7) \times (-2)}{(4 - 2x)^2} \\ &= \frac{(8 - 4x) - (-4x - 14)}{(4 - 2x)^2} \\ &= \frac{22}{(4 - 2x)^2} \end{aligned}$$

Vous devriez avoir la (bonne) habitude de ne pas développer le dénominateur, il sera facile d'étudier son signe sous cette forme (c'est un carré, donc toujours positif).

- (c) Le dénominateur est un carré donc toujours positif, le numérateur est 22 qui est également positif, ainsi g' est toujours positive sur son ensemble de définition. On en déduit le tableau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $g'(x)$	+	+	
variations de g			

- (d) (Bonus) Pour étudier le signe de g qui est un quotient, nous avons besoin de connaître le signe du numérateur et du dénominateur.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. On a :

$$\begin{array}{lll}
 2x + 7 > 0 & \text{et} & 4 - 2x > 0 \\
 \Leftrightarrow 2x > -7 & \Leftrightarrow & -2x > -4 \\
 \Leftrightarrow x > \frac{-7}{2} & \Leftrightarrow & x < \frac{-4}{-2} \\
 \Leftrightarrow x > -3,5 & \Leftrightarrow & x < 2
 \end{array}$$

On vient d'écrire que $2x + 7$ est *positif* lorsque x est *supérieur* à $-3,5$, et que $4 - 2x$ est *positif* lorsque x est *INFÉRIEUR* à 2 . D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-3,5$	2	$+\infty$
signe de $2x + 7$	-	0	+	+
signe de $4 - 2x$	+	+	0	-
signe du quotient	-	0	+	-

Pour conclure, g est donc positive sur $[-3,5 ; 2[$ et négative sur le reste de son domaine de définition, ce qui est cohérent avec la représentation graphique.

2. (a) La conjecture est très malaisée pour cette fonction du fait d'ordonnées très grandes associées à de petites abscisses. Sur Geogebra on peut conjecturer que la fonction est croissante entre $-\infty$ et une valeur difficile à identifier (on pourrait même avoir l'impression que la fonction n'est pas définie en 0!), puis décroissante jusqu'en 1, puis à nouveau croissante jusqu'à $+\infty$. Sur la calculatrice en revanche, comme elle ajuste automatiquement les axes, on peut conjecturer que la fonction est croissante sur l'intervalle $]-\infty ; -0,5[$, mais si on en fait pas attention on dirait qu'elle est ensuite décroissante sur l'intervalle $[-0,5 ; +\infty[$. En regardant plus en détail, la calculatrice (numworks au moins) affiche un minimum de -20 atteint en 1, ce qui est cohérent avec ce qu'on a observé sur Géogebra.

- (b) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} comme produit et composée de fonctions dérivables. Il s'agit d'un produit $f = uv$, avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
- $$\begin{cases} u(x) = -2x^2 + 1 \\ v(x) = e^{-4x+7} \end{cases} \quad \text{et donc, en n'oubliant pas le}$$

$$-4 \text{ qui "descend" dans la dérivée de } v : \begin{cases} u'(x) = -4x \\ v'(x) = -4e^{-4x+7} \end{cases}$$

Donc en appliquant la formule $(uv)' = u'v + uv'$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -4x(e^{-4x+7}) + (-2x^2 + 1) \times (-4e^{-4x+7}) \\
 &= -4x(e^{-4x+7}) + 8x^2e^{-4x+7} - 4e^{-4x+7} \\
 &= (-4x + 8x^2 - 4)e^{-4x+7}
 \end{aligned}$$

S'arrêter à l'avant dernière ligne serait correct pour cette question si on en vous donnait pas la dérivée à retrouver mais prenez l'habitude de factoriser dès que possible, on en aura besoin à la question suivante !

- (c) On est en présence d'un produit, on étudie le signe de chaque facteur. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, e^{-4x+7} est positif, donc le signe dépend uniquement du signe du trinôme $8x^2 - 4x - 4$, dont le discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 8 \times (-4) = 144 = 12^2$ et les racines sont donc $x_1 = \frac{4 - 12}{2 \times 8} = -0,5$ et $x_2 = \frac{4 + 12}{2 \times 8} = 1$. On obtient donc le tableau de signe et de variations suivant :

x	$-\infty$	-0.5	1	$+\infty$	
signe de e^{-4x+7}	+	+	+	+	
signe de $8x^2 - 4x - 4$	+	0	-	0	+
signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+
variations de f					

Donnons les valeurs exactes ainsi que des valeurs approchées des extrema (les valeurs exactes car ce sont celles qui nous intéressent, les valeurs approchées pour pouvoir comparer avec nos conjectures) :

- $f(-0,5) = \frac{e^9}{2} \simeq 4052$
- $f(1) = \frac{e^3}{-1} = -e^3 \simeq -20$

Prenez l'habitude de comparer rapidement votre tableau avec vos conjectures graphiques, si elles sont différentes, vous vous êtes probablement trompé.e dans le calcul(ou plus rarement dans votre lecture graphique, ce qui était possible ici).

3. (Bonus)

- (a) h est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = e^x - 1$.
- (b) Chercher à déterminer le signe d'une fonction, c'est chercher à comprendre quand est-ce qu'elle est positive (ou négative, cela revient au même). On cherche donc à résoudre $h'(x) \geq 0$.

$$\begin{aligned}
 & h'(x) \geq 0 \\
 \iff & e^x - 1 \geq 0 \\
 \iff & e^x \geq 1 \\
 \iff & e^x \geq e^0 \\
 \iff & x \geq 0
 \end{aligned}$$

Cette dernière équivalence "se voit" par croissance de l'exponentielle. On en donnera tout de même à la fin de l'exercice une preuve propre (*Dans l'absolu, on aimerait que vous compreniez une telle preuve, mais en pratique, pas de panique si des arguments vous échappent, ce n'est pas un attendu*).

En résumé, nous avons montré que avec notre série d'équivalences que h' est positive ($h'(x) \geq 0$) lorsque x est positif ($\iff x \geq 0$). On peut résumer cette information dans un tableau de signes :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $h'(x)$	-	0	+

(c) On peut conclure en dressant le tableau de variations de h :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $h'(x)$	$-$	0	$+$
variations de h			

Preuve de $e^x \geq e^0 \iff x \geq 0$:

On doit montrer que e^x est supérieur à e^0 quand (point 1) et seulement quand (point 2) x est positif.

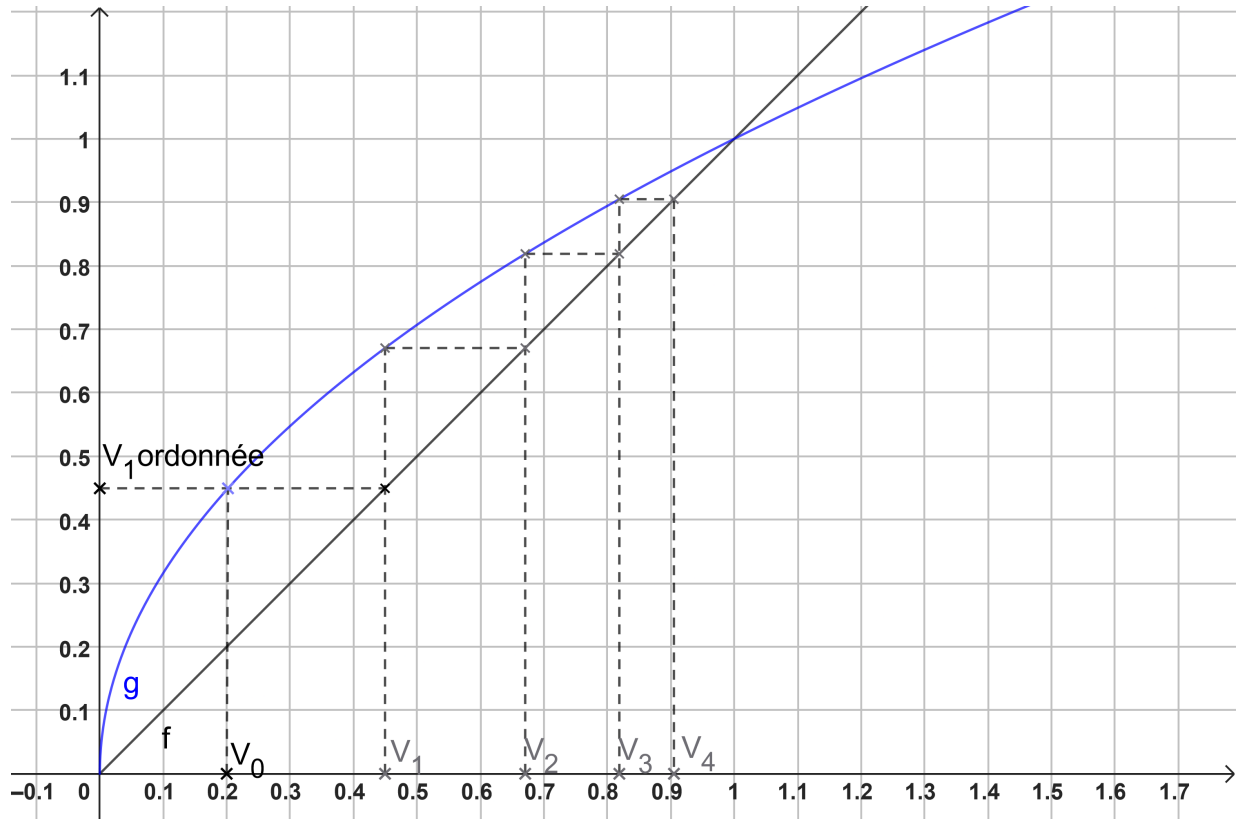
1. Si $x \geq 0$, comme exponentielle est une fonction croissante, elle conserve le sens des inégalités, et donc $e^x \geq e^0$.
2. Supposons maintenant que $e^x \geq e^0$. Si $x < 0$ (c'est à dire si x était strictement négatif), on aurait comme précédemment par croissance (stricte) de l'exponentielle $e^x < e^0$. Or ce n'est pas le cas ! Ainsi, la seule possibilité est que x soit positif. \square

Exercice 3 : Étude de suites

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n + n - u_n = n \geq 0$. Cela signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \geq u_n$, et la suite est donc croissante.

Remarque : la dernière inégalité se lit "le terme suivant (u_{n+1}) est plus grand que le terme actuel (u_n)".

2. (a) Voir graphique
(b) Voir graphique
(c) Voir graphique



- (d) On conjecture que la suite (v_n) est croissante et que sa limite sera 1, car on "voit" que l'escalier que l'on construit va se rapprocher du point d'intersection des deux courbes situé à l'abscisse 1.